不安定プラズマの輸送方程式（続）

（５月１８日受理）

Parp III　Rutherford−Frieman の理論

西　川　恭　治（東大教養）大　坂　文　雄（東北大通研）

§１　方法と結果の要約

Rutherford−Frieman（以下Ｒ．Ｆと略記する）の方法は、速度分布関数 $f(v\,t)$ と対相関関数 $g(1,2,t)\equiv g(v_1\,v_2\,x_1-x_2\,t)$ に対する次の方程式を出発点とする。

$$\frac{\partial f(v_1 t)}{\partial t}=\frac{n}{m}\int dx_2 dv_2\,\frac{\partial\phi(12)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial g(12\,t)}{\partial v_1} \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_1\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\right)g(12\,t)$$

$$-\frac{n}{m}\frac{\partial f(v_1 t)}{\partial v_1}\cdot\int dx_3 dv_3\frac{\partial\phi(13)}{\partial x_1}g(23\,t)$$

$$-\frac{n}{m}\frac{\partial f(v_2 t)}{\partial v_2}\cdot\int dx_3 dv_3\frac{\partial\phi(23)}{\partial x_2}g(13\,t)$$

$$=\frac{\partial\phi(12)}{\partial x_1}\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial v_1}-\frac{\partial}{\partial v_2}\right)f(v_1 t)\,f(v_2 t) \tag{2}$$

ここに、ｎは密度，$\phi(12)$ は Coulomb potential $e^2/|x_1-x_2|$ を表わす。この方程式は、B−B−G−K−Y hierarchy を次の近似の下に閉じさせたものである。

(a)　(2)式右辺に於て

$$\frac{\partial\phi(12)}{\partial x}\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial v_1}-\frac{\partial}{\partial v_2}\right)g(1,2\,t)$$

という項を無視する。

(b)　三体分布関数 $f^{(3)}(1\,2\,3\,t)$ を

$$f(1\,2\,3\,t)=f(v_1 t)\,f(v_2 t)\,f(v_3 t)+f(v_1 t)\,g(2\,3\,t)$$

$$+f(v_2 t)\,g(13t)+f(v_3 t)\,g(1\,2\,t)$$

$+ \ h(123t)$

と表わした時、三体相関々数h(123t)を無視する。

これらの近似は、Part I § 4でのべたrandom phase近似と同等である事が示される。

R.F.はここで更に、

c) f(vt)の時間依存性を $g(12t)$ のそれに比べて無視する。

この近似は、Part I でのべた $\tau_2 \ll \tau_3$ という場合にのみ許されるものである。

この近似の下に、tに対するLaplace変換を行うと、$g(12t)$ のFourier変換

$$g(kv_1v_2t) = (2\pi)^{-3}\int g(12t)\, e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}\, d(x_1 - x_2)$$

は次のように書かれる。

$$g(kv_1v_2t) = \frac{1}{(2\pi i)^3}\int_c dp\, e^{pt}\int_{c_1}\int_{c_2}\frac{dp_1\,dp_2}{p-p_1-p_2}\,\frac{1}{p_1+L(kv_1)}\,\frac{1}{p_2+L(-kv_2)}\,F(kv_1v_2p) \tag{3}$$

ここに、L(kv)は

$$L(kv) = ik\cdot v + \alpha(kv)\int ne\,dv \tag{4}$$

で定義される積分演算子で、$F(kv_1v_2p)$ は

$$F(kv_1v_2p) = S(kv_1v_2)/p + g(kv_1v_20) \tag{5}$$

$$S(kv_1v_2) = -\frac{1}{8\pi^3}\{\alpha(kv_1)\,ef(v_2) + \alpha(-kv_2)\,ef(v_1)\} \tag{6}$$

で与えられる。但し

$$\alpha(kv) \equiv -\frac{4\pi e}{mk^2}\, iK\cdot\frac{\partial}{\partial v}f(v), \tag{7}$$

(3)の積分路は、$\mathcal{R}(p-p_1-p_2)>0$ という条件の下で、いずれも他のすべての特異点を左に見て、$-i\infty$ より $+i\infty$ までとる。

(3)を計算するに当つて、R.F. は、Vlasov 方程式に対するLandauの初期値問題の解から得られる次の関係を使う。

$$\frac{1}{p+L(kv)}=\frac{1}{p+ik\cdot v}\left\{1-\frac{\alpha(k\,v)}{\varepsilon(Kp)}\int\frac{ne\,dV}{p+ik\cdot v}\right\} \tag{8}$$

但し、$\epsilon(k\,p)$ は複素誘電率で、

$$\epsilon(k\,p)=1+ne\int dV'\,\frac{\alpha(k,v')}{p+ik\cdot v'} \tag{9}$$

及びその p の左半平面への解析接続で与えられる。

以下、R.F. の計算結果を要約しよう。

まず安定な場合、(3)の積分路をすべて虚軸のすぐ右まで移動し、$p=0$ の pole の寄与から $g(k\,v_1\,v_2\,t=\infty)$ を求め、それを(1)式に代入して、Balescu-Lenard の衝突項(以下B－L項と略記する)を導いた(Appendix I)。

次に不安定系では、この他に虚軸の右側に生ずる $\epsilon(Kp_1)=0$, $\epsilon(-Kp_2)=0$ の poles の寄与を拾わねばならない。簡単のため、そのようなpoles は $p_1=p(K)=-i\omega(K)+\gamma(K)$ 及び $p_2=p(-K)=i\omega(K)+\gamma(K)$ に夫々唯一つずつしか存在しないとしよう。R.F. は、二のpoles の寄与を計算するに当つて、まず(3)の積分の順序を入れかえて次のように書きかえる。

$$\begin{aligned} g(kv_1v_2t)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{c_1}\frac{dp_2}{p_1+L(Kv_1)}\int_{c_2}\frac{dp_2}{p_2+L(-Kv)}\cdot \\ \left\{\frac{1-e^{(p_1+p_2)t}}{p_1+p_2}S(kv_1v_2)-e^{(p_1+p_2)t}g(Kv_1v_2 0)\right\} \end{aligned} \tag{10}$$

次に p_1, p_2 の積分路をいずれも左半平面に閉じて、最も早く成長する項と称して $p_1=p(K)$, $p_2=p(-K)$ poles の寄与のみを拾い出し、次の結果を導いた。

$$\mathcal{G}_{RF}(K v_1 v_2 t) = \frac{\alpha(K v_1)\,\alpha(-K v_2)}{[p(K)+iK\cdot v_1][p(-K)-iK\cdot v_2]}\ G(K t) \tag{11}$$

$$G(K t) = \frac{1}{|\epsilon'(K)|^2}\left\{\frac{e^{2\gamma(K)t}-1}{2\gamma(K)}\frac{ne^2}{(2\pi)^3}\int dv' f(v') \left[\frac{1}{p(K)+ik\cdot v'}+\frac{1}{p(-K)-iK\cdot v'}\right] + e^{2\gamma(K)t}\, n^2 e^2 \int \frac{dv'\,dv''\,\mathcal{G}(K v' v''\ 0)}{[p(K)+iK\cdot v'][p(-K)-iK\cdot v'']}\right\} \tag{12}$$

ここに $\epsilon'(K) = [\partial\epsilon(Kp)/\partial p]_{p=p(K)}$ である。この $\mathcal{G}_{RF}$ を(1)に代入すると

$$\frac{\partial f(v t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v}\cdot\left\{D_{RF}(v)\cdot\frac{\partial f(v t)}{\partial v}\right\} \tag{13}$$

という拡散方程式をうる。拡散係数 D_{RF} は

$$D_{RF}(v) = \frac{16\pi^2 e^2}{m^2}\int\frac{KK}{k^4}\frac{\gamma(K)\ G(Kt)}{[\omega(K)-K\cdot v]^2+\gamma(K)^2}\,dK \tag{14}$$

で与えられ、又、G(Kt) は次の方程式をみたす。

$$\frac{\partial}{\partial t}G(Kt) = 2\gamma(K)\,G(Kt) + \frac{1}{|\epsilon'(K)|^2}\frac{ne^2}{(2\pi)^2}\int dv' f(v') \left[\frac{1}{p(K)+iK\cdot v'}+\frac{1}{p(-K)-iK\cdot v'}\right] \tag{15}$$

(13)〜(15)は、Part I でのべた準線形理論と似た形をしており、主な違いは (15)で自然放出による source field がつけ加わついている点だと、R.F. は述べている。その意味で、一見 Part III でのべた Pines-Schrieffer の方程式と似ているが、以下に示すようにこれは正しくない。

§ 2　R．F．理論の批判

R.F. の理論は、(9)式まで及び安定系でB－L項が出るというところ迄は正しいが、それ以後の計算に於て、次の三つの点で誤りをおかしている。

(a)　(10)式で積分の順序を入れかえた時、p_1, p_2 の積分路も変形される事を無視している。実際、p の被積分関数は $\mathcal{R}(p-p_1-p_2)>0$ という範囲でのみ

定議されたものであり、従つて $p=0$ の pole の residue を求める時には $p_1+p_2=0$ が積分路の右側に来るように変形してやらねばならない。

(b) R.F. は (10)式で $p_1 p_2$ の積分路を共に左側に閉じているが、これが許されるのは $e^{(p_1+p_2)t}$ という因子を持つ項のみである。それ以外の項（即ち $p=0$ の pole の寄与）に対しては、後に示すように、少くとも p_2 は右に閉じなければならない。

(c) R.F. は振動しながら成長する項を、一種の phase mixing によつて急速に減衰しまうとして無視しているが、これは正しくない。それでは、このような誤つた計算に基く R.F. の結果はどのような矛盾を含んでいるであろうか。

まず第一に、(10)式に始まるR.F. の計算からは、安定な場合にも、B－L項が出て来ない。この項は、(a)及び(b)に注意すれば、$p=0$，$p_1+p_2=0$ という pole の寄与から、安定，不安定を問わずに出て来る事が示される (10)式のままでは、$p_1+p_2=0$ という pole は存在しない）。第二に、$p_1=p(k)$，$p_2=p(-K)$ という pole の寄与について考えると、これは p_1，p_2 共に左半平面に閉じた時にのみ現われるもので、それは(b)に注意すると必ず $e^{[p(K)+p(-K)]t}=e^{2\gamma(K)t}$ という因子をもつ筈である。その結果、この pole の寄与のみからは、(15)式の自然放出項は現われなくなる。自然放出項は一部分B－L項の plasma poles の寄与からも出て来るが、その形は(15)のそれとは異るものである。最後に、B－L項と $p_1=p(K)$，$p_2=p(-K)$ の pole の寄与だけでは、(14)の拡散係数及び自然放出項が $\gamma(K)$ の符号によつて負になる場合が生ずる。これは、振動しながら成長する項を無視しているためである。

§3 R．F．理論の修正

我々の出発点は(3)式である。まず(1)のフーリエ変換

$$\frac{\partial f(v_1 t)}{\partial t}=-i\omega_p^2\int dK\frac{K}{K^2}\cdot\frac{\partial}{\partial v_1}\int dv_2\, g(K v_1 v_2 t)\ ;\ \omega_p^2=\frac{4\pi e^2 n}{m} \qquad (16)$$

に注意すると、kinetic equation への寄与を問題とする限りでは、

$\mathrm{Im}\int dv_2\, \mathcal{g}(Kv_1v_2t)$ を求めればよい事が分る。(8)を(3)に代入して整理すると次の結果をうる。

$$\int dv_2 \mathcal{g}(Kv_1v_2\, t) = \frac{1}{(2\pi i)^3}\int_C dp\, e^{pt}\int_{C_1}\int_{C_2}\frac{dp_1\, dp_2}{p-p_1-p_2}\quad\frac{1}{p_1+iK\cdot v_1}\cdot$$
$$\times\ \frac{1}{\epsilon(-Kp_1)}\int\frac{dv_2}{p_2-iK\cdot v_2}\{F(Kv_1\ v_2p) \tag{17}$$
$$-\ \frac{\alpha(Kv_1)}{\epsilon(Kp_1)}\int\frac{dv'\,ne}{p_1+iK\cdot v'}\ F(Kv'\ v_2p)\}$$

さて、こゝでpの関数

$$\int dv\frac{\varphi(v)}{iK\cdot v\pm p} = \begin{cases}\Phi_r(p) & \text{for } \mathcal{R}p > 0\\ \Phi_l(p) & \text{for } \mathcal{R}p < 0\end{cases} \tag{18}$$

及びその解析接続の解析的性質に着目する。$\Phi_r(p)$ 又は $\Phi_e(p)$ は(i)夫々にpの右又は左半平面で解析的で、且つ、(ii) $|p|\to\infty$ で零になる。

この点に注意してまず(17)の v_2 についての積分をp_2の関数として考えるとこれは右半平面で解析的である。そこでp_2の積分路を右半平面に閉じるとその中に現われるpole は$p_2=p-p_1$ のみである。その結果は

$$\int dv_2\, g(Kv_1v_2t) = \mathcal{g}_{\mathrm{I}}(Kv_1t) + \mathcal{g}_{\mathrm{II}}(Kv_1t) \tag{19}$$

$$\mathcal{g}_{\mathrm{I}}(Kv_1t) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_C dp\, e^{pt}\int_{C_1}\frac{dp_1}{p_1+iK\cdot v_1}\ \frac{1}{\epsilon(-K,p-p_1)}\int dv_2\ \frac{F(Kv_1v_2p)}{p-p_1-iK\cdot v_2} \tag{20}$$

$$\mathcal{g}_{\mathrm{II}}(Kv_1t) = -\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_C dp\, e^{pt}\int_{C_1}dp_1\frac{\alpha(Kv_1)}{p_1+iK\cdot v_1}\ \frac{ne}{\epsilon(-K,p-p_1)\,\epsilon(K,p_1)}$$
$$\times\int dv_2\int dv_3\frac{F(Kv_2v_3p)}{(p_1+iK\cdot v_2)(p-p_1-iK\cdot v_3)} \tag{21}$$

となる。次に$\mathcal{g}_{\mathrm{I}}(Kv_1\ t)$について、$v_2$の積分を p_1の関数として考えてみよう。$\mathcal{R}(p-p_1)>0$ に注意すると、これは左半平面で解析的な関数の右半平面への解析接続になつている事が分る。従つて今度は左半平面にp_1の積分路

を閉じると、その中に現われるpole は$p_1=-iK.v_1$ のみとなる。その結果は次のように書かれる。

$$\mathscr{G}_I(Kv_1t)=\frac{1}{2\pi i}\int_c dp\, e^{pt}\frac{1}{\epsilon(-K,\, p+iK\cdot v_1)}\int dv_2\frac{F(Kv_1v_2p)}{p+iK\cdot(v_1-v_2)} \tag{22}$$

さて、ここまでの書きかえは全く形式的で、何の近似も行つていないが、これから先に進むためには、被積分関数の特異点の位置について或る種の仮定を行う必要がある。まず我々は(16)式のsecular な振舞に寄与する項のみに興味がある事に着目しよう。我々はここで、そのような項は、$p=0$とplasma polesの寄与からのみ生じ、それ以外のpoles はいずれも虚軸から充分離れたところにあつて、急速に減衰するような寄与しか与えないと仮定する。一方、Appendix I に示すように、$p=0$のpole の寄与はB－L項を与える。この事に注意すると、我々のkinetic equationは次のような形に書かれる。

$$\frac{\partial f(v_1t)}{\partial t}=\mathscr{J}'_{B.L}+\mathscr{J}_p \tag{23}$$

ここに$\mathscr{J}'_{B.L}$はB－L項からplasma poles の寄与を差し引いたもの、$\mathscr{J}_p$はplasma poles の寄与の総和である。この中、$\mathscr{J}'_{B.L}$は主としてCoulomb 力の短距離部分によるもので、充分希薄な系では無視してよいと思われる。そこで以下では$\mathscr{J}_p$ の計算に限る事にしよう。

まず(22)で与えられる$\mathscr{G}_I(Kv_1t)$を考えよう。ここでは、pの積分路を左に閉じる事によつて、$p=0$と$p=-iK\cdot v_1+p(-K)$という二つのpoles の寄与が現われ（それ以外のpoles は$\mathscr{J}_p$には寄与しない）、その内、v_1 の関数として$iK\cdot v_1=p(-K)$ というplasma pole の寄与にきく部分のみを拾い出すと*)、次のように書かれる。

$$\mathscr{G}_1(Kv_1t)=\frac{e^{[p(-K)-iK\cdot v_1]t}-1}{p(-k)-iK\cdot v_1}\,\frac{1}{\epsilon'(-K)}\int_{c+}dv_2\frac{S(Kv_1v_2)}{p(-K)-iK\cdot v_2} \tag{24}$$

---

*) これは、$f(v_1t)$を Schwartz の意味の分布関数と考えることによつて許される。

ここに積分路 c+ は、v_2 の K 方向の成分が $iK\cdot v_2 = p(-K)$ の上側を通るように変形したものである。

次に $\mathcal{G}_{\mathrm{II}}(K v_1 t)$ を考えよう。まず、v_2, v_3 の積分を p_1 の関数として左半平面で解析的な関数と右半平面で解析的な関数の和の形に書き、前者に対しては左半平面に、後者には右半平面に p_1 の積分路を閉じる。すると、左側に現われる poles は $p_1 = -iK\cdot v_1$ と $p_1 = p(K)$ であり、右側には $p_1 = p - p(-K)$ のみが現われる。それ以外の poles は $\mathcal{J}_p$ には寄与しない poles である。次にその結果を p について左半平面に閉じて積分すると、$p = 0$, $p = 2\gamma(K)$ 及び $p = -iK\cdot v_1 + p(-K)$ の三つの poles が寄与する。その内、$iK\cdot v_1 = -p(K)$ 又は $iK\cdot v_1 = p(-K)$ という plasma poles の寄与にきく部分のみを拾い出してまとめると、その結果は次の様に書かれる。

$$\mathcal{G}_{\mathrm{II}}(Kv_1 t) = ne\alpha(Kv_1)\left\{\frac{e^{\{p(-K)-iK\cdot v_1\}t}-1}{p(-K)-iK\cdot v_1}\cdot\frac{1}{\epsilon'(-K)\,\epsilon(K,-p(-K))}\cdot\right.$$
$$\times\int_{c_-}dv_2\int_{c_+}dv_3\frac{s(K v_2 v_3)}{[p(-K)-iK\cdot v_2][p(-K)-iK\cdot v_3]} \tag{25}$$
$$\left.+\frac{e^{-\{p(K)+iK\cdot v_1\}t}-1}{p(K)+iK\cdot v_1}\cdot\frac{e^{2\gamma(K)t}}{|\epsilon(K)|^2}\int_{c_-}dv_2\int_{c_+}dv_3\frac{F(Kv_2 v_3\, 2\gamma(K))}{[p(K)+iK\cdot v_2][p(-K)-iK\cdot v_3]}\right\}$$

ここに積分路 c_- は、v_2 の K 方向の成分が $iK\cdot v_2 = -p(K)$ 及び $p(-K)$ の下を通る様に変形したものである。

さて、(24), (25) に現われる $s(Kv_1 v_2)$ の積分は次の諸関係式を使うと簡素化する事が出来る。

$$\left.\begin{aligned} ne\int_{c_-}dv\frac{\alpha(K,v)}{p(K)+iK\cdot v} &= ne\int_{c_+}\frac{\alpha(-K v)}{p(-K)-iK\cdot v} = -1 \\ ne\int_{c_-}dv\frac{\alpha(K v)}{p(-K)-iK\cdot v} &= 1-\epsilon(K,-p(-K)) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

この関係を使って (24), (25) をまとめると、次の結果をうる。

$$\int dv_2\,\mathcal{G}(K v_1 v_2 t) = \frac{1}{8\pi^3 n}\,\frac{e^{\{p(-K)-iK\cdot v_1\}t}-1}{p(-K)-iK\cdot v_1}\cdot\frac{1}{\epsilon'(-K)}\{f(v_1)$$

$$+$$

$$+\frac{ne\alpha(Kv_1)}{\epsilon(K,-p(-K))}\left[\int_{c_+}-\int_{c_-}\right]dv_2\frac{f(v_2)}{iK\cdot v_2-p(-K)}\}$$

$$-\frac{e^{-[p(K)+iK\cdot v_1]t}-1}{p(K)+iK\cdot v_1}\cdot\frac{e^{2\gamma(K)t}}{|\epsilon'(K)|^2}\,ne\alpha(Kv_1)$$

$$\{\times\frac{1}{8\pi^3 n\cdot 2\gamma(K)}\left[\int_{c_+}\frac{dv_2}{iK\cdot v_2-p(-K)}-\int_{c_-}\frac{dv_2}{iK\cdot v_2+p(K)}\right]f(v_2)$$

$$-\int_{c_-}dv_2\int_{c_+}dv_3\frac{\mathcal{G}(Kv_2\,v_3\,0)}{[p(K)+iK\cdot v_2][p(-K)-iK\cdot v_3]}\}\tag{27}$$

(27)を(16)に代入すれば kinetic equation が得られる。(27)に現われる様々な項の中、$\alpha(Kv_1)$に比例する項は(13)の形の拡散項に、それ以外の項は自然放出項を与える。厳密にはこの他に$\mathcal{J}'_{B.L}$がある事は前にものべた通りである。

§4　Pines-Schrieffer 方程式との関係

(27)式を見通しのよい形に書きかえるために、この章では$|\gamma(K)|\ll\omega(K)$の極限を考え、その極限で Pines-Schrieffer 方程式に還元できる事を示そう。

まず、Appendix II に示すように、Schwartz の意味の分布関数を考える時には

$$\frac{e^{-[iK\cdot v_1-p(-K)]t}-1}{iK\cdot v_1-p(-K)}\sim\frac{e^{-[iK\cdot v_1+p(K)]t}-1}{iK\cdot v_1+p(K)}\sim-\pi\delta_+[\omega(K)-K\cdot v_1]\tag{28}$$

と書かれる事を使う。更に$|\gamma(K)|\ll\omega(K)$に於いて成り立つ次の近似

$$\epsilon'(K)\sim\frac{2i}{\omega(K)},\quad\epsilon'(-K)\sim-\frac{2i}{\omega(K)}\tag{29}$$

$$\epsilon(K,-p(-K))\sim-2\gamma(K)\,\epsilon'(K)\tag{30}$$

$$\{\int_{c_+}\frac{dv_2}{iK\cdot v_2-p(-K)}-\int_{c_-}\frac{dv_2}{iK\cdot v_2\pm p(\pm K)}\}\,f(v_2)\sim$$
$$-2\pi\int dv_2\,f(v_2)\,\delta[\omega(K)-K\cdot v_2]\tag{31}$$

を行い、(27)の虚数部分のみを拾い出すと、次の結果をうる。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\int dv_2\, g(K\, v_1\, v_2\, t) = \frac{1}{16\pi^2 n}\ \delta[\omega(K) - K.\, v_1]\{\ \omega(K)\ f(v_1) \\
+ \frac{E(K\, t)}{m} K\cdot\frac{\partial}{\partial v_1}\ f(v_1)\ \}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
E(K\, t) = \frac{e^{2\gamma(K)t}-1}{2\gamma(K)}\ \frac{16\pi^4 n^2 e^2 \omega^2(K)}{k^2}\int dv_2.\, f(v_2)\ \delta[\omega(K) - K\cdot v_2] \\
+\ e^{2\gamma(K)t}\ \frac{16\pi^4 n^2 e^2 \omega^2(K)}{k^2}\int_{c_-} dv_2 \int_{c_+} dv_3 \frac{g(K\, v_2\, v_3\ 0)}{[p(K)+iK\cdot v_2][p(-K)-iK\cdot v_3]}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

(32)を(16)に代入したもの、並びに(33)が次の Pines-Schrieffer 方程式をみたす事は直ちに示される。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(v_1 t)}{\partial t} = \frac{e^2}{4\pi m}\int dK \frac{K}{k^2}\cdot\frac{\partial}{\partial v_1}\{\ \delta[\omega(K) - K\cdot v_1][\ \omega(K)\ f(v_1) \\
+ \frac{E(K\, t)}{m}\cdot K.\frac{\partial}{\partial v_1}\ f(v_1)\ ]\}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

$$
\frac{\partial E(Kt)}{\partial t} = 2\gamma(K)\ E(Kt) + \frac{4\pi^2 n e^2}{k^2}\ \omega^2(K)\int dv_2 f(v_2)\ \delta[\omega(K) - K\cdot v_1] \tag{35}
$$

この方程式が完全に Pines-Schrieffer 方程式と一致する事を示すためには、(33)で定義された $E(Kt)$ が実際に plasma の energy になつている事を証明しなければならない。それには、$E(K\,t)$ の初期値が plasma energy を表わす事を示せば充分である。(33)で $t=0$ とおくと

$$
E(K\,0) = \frac{16\pi^4 n^2 e^2 \omega^2(K)}{k^2}\int_{c_-} dv_2 \int_{c_+} dv_3 \frac{g(K\, v_2\, v_3\ 0)}{[p(K)+iK\cdot v_2][p(-K)-iK\cdot v_3]} \tag{36}
$$

となる。$|\gamma(K)| \ll \omega(K)$ では、右辺の積分への寄与は、大部分 $|K\cdot v_2|$, $|K\cdot v_3| \ll \omega(K)$ という領域から来るであろう。そこで

$$
\begin{aligned}
\int_{c_-} dv_2 \int_{c_+} dv_3 \frac{g(K\, v_2\, v_3\ 0)}{[p(K)+iK\cdot v_2][p(-K)-iK\cdot v_3]} \approx \frac{1}{|p(K)|^2}\int dv_2 \int dv_2\, g(K\, v_2\, v_3\, 0) \\
\approx \frac{1}{\omega^2(K)}\int dv_2 \int dv_3\ g(K\, v_2\, v_3\ 0)
\end{aligned}
\tag{37}
$$

と近似しよう。右辺は、密度揺動$<\rho_K \rho_{-K}>$を使つて次のように書かれる。

$$\int dv_2 \int dv_3\, g(K v_2 v_3 0) = \frac{1}{8\pi^3 n^2} <\rho_K \rho_{-K}> \tag{38}$$

一方、縦波電場E_Kに対するPoissonの方程式

$$iK.E_K = 4\pi e \rho_K \tag{39}$$

を使うと、(36)は次のように書かれる。

$$E(K0) \approx \frac{<|E_K|^2>}{8\pi} \tag{40}$$

右辺は他ならぬplasma waveのenergyである。

かくして(34)，(35)はPines-Schrieffer方程式と完全に一致する事が示された。

§5 Discussions

(i) (34)，(35)は、(17)のplasma polesの寄与から$|\gamma(K)| \ll \omega(K)$という極限に於て、安定，不安定を問わずに導かれたものである。これを導くに当つて、振動しながら成長する項（$p=-iK\cdot v_1+p(K)$のpoleの寄与）が重要な役割を演じている事を強調しよう。実際、R.F.に従つてこの項を無視すると、(28)は

$$-\frac{1}{iK\cdot v_1 \pm p(\pm K)} = \frac{-1}{i[K\cdot v_1-\omega(K)] \pm \gamma(K)} = \frac{i[K\cdot v_1-\omega(K)] \mp \gamma(K)}{[K\cdot v_1-\omega(K)]^2+\gamma^2(K)}$$

となり、その実数部分は$|\gamma(K)| \ll \omega(K)$の極限に於て、

$\mp \frac{\gamma(K)}{|\gamma(K)|}\cdot \pi\delta[\omega(K)-K\cdot v_1]$と書かれ、その附号は$\gamma(K)$の附号に依存するようになる。その結果は当然kinetic equationにも影響し、拡散係数や自然放出項が負になる場合も生ずる。この矛盾は、Appendix IIに示すように、振動項を取り入れる事によつてみごとに解決する。

(ii) §4の結果は$f(v_1 t)$の時間依存性を$g(K v_1 v_2 t)$のそれに比べて無視する近似、即ち$\tau_2 \ll \tau_3$の範囲でのみ導かれたものである。従つてここ

に得られた方程式を使つて安定化のメカニズムや定常状態の解析を行う事はできない。しかしながら、この結果を用いて、$\gamma(K)\to 0$ ，$t=\infty$ ，$\gamma(K)\,t\sim$有限という極限に於ける振舞を推測する事はできる。実際この時には(33)の第二項、対相関の初期値による部分は第一項に比べて、$\gamma(K)/\omega(K)$ の程度となる事が推測される。これは対相関関数がある定常分布に近づくに従つてその初期値によらなくなる事を示している。この結果は Part Ⅳ で $\tau_2\sim\tau_3$ の場合を論ずる際に初期条件としてとり入れる事ができる。

(iii) (34) ，(35) は形式上 Pines―Schrieffer 方程式と完全に一致しているが、Part II でも述べたように、これは決して trivial ではない。実際 Pines―Schrieffer 方程式に出て来る一体分布関数は衣を着た個別粒子のそれであり、ここで扱つているような裸の粒子のそれではない。その上 Part II でのべたように、Pines―Schrieffer 方程式はいくつかの検討を要する近似の下に導かれたものである。これらの点については Part V でくわしく論じる予定である。

最後に、§ 3 ，§ 4 では、plasma poles 以外の寄与を、$\mathscr{I}'_{B.L}$ は slow process として、又それ以外は fast proccss として、夫々落しているがこれらについては目下検討中である事を附言しておく。

Appendix I　B－L項の導出

B－L項の導出はいろいろな方法でなされているが、R．F．の方法での導き方はまだ示されていないので、ここでそれを行おう。

我々の出発点は(21)及び(22)式である。ここで $p=0$ の pole の寄与を拾い出し、p_1 の積分路を虚軸のすぐ右まで移動すると、若干の書きかえの末次のように書かれる。

$$g_L(Kv_1t) = g_I^{(1)} + g_I^{(2)} \tag{A-1}$$

$$g_I^{(1)} = \frac{\pi}{|\epsilon(-K,\, iK\cdot v_1)|^2}\int dv_2\, S(Kv_1v_2)\, \delta_-[K\cdot(v_1-v_2)] \tag{A-2}$$

$$g_I^{(2)} = \frac{ne\pi^2}{|\epsilon(-K,\, iK\cdot v_1)|^2}\int dv_2\int dv_3\, S(Kv_1v_2)\,\alpha(Kv_3)\,\delta_-[K\cdot(v_1-v_2)]\,\delta_+[K\cdot(v_1-v_2)] \tag{A-3}$$

$$\mathcal{G}_{\mathrm{II}}(Kv_1 t) = -\frac{ne\pi^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} du\ \delta_-[K\ v_1 - u]\frac{\alpha(K, v_1)}{|\epsilon(-K, iu)|^2} \times \int dv_2 \int dv_3 S(Kv_2 v_3)\ \delta_+[u - K\cdot v_2]\ \delta_-[u - K\cdot v_3] \quad \text{(A-4)}$$

但しここで Plemalj の公式

$$\lim_{\epsilon\to+0} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mp\ \pi i\ \delta_\pm(x) \quad \text{(A-5)}$$

を用いた。不安定系ではこの他に、$p_1 = \pm p(\pm K)$ の poleの寄与が現われるが、この寄与は、Kの偶関数で、(16)には寄与しない*)ので省略した。

さて、$S(Kv_1 v_2)$ が純虚数である事を用いれば、$\mathrm{Im}\,\mathcal{G}_{\mathrm{I}}^{(1)}$ が B－L項る与える事は直ちに証明できる。そこで以下では、$\mathrm{Im}\,\mathcal{G}_{\mathrm{I}}^{(2)}$ と $\mathrm{Im}\,\mathcal{G}_{\mathrm{II}}(Kv_1 t)$ とが消し合う事を示そう。

まず

$$\int dv_2 \int dv_3\, \alpha(Kv_2)\ \alpha(Kv_3)\ \delta_-[K(v_1 - v_2)]\ \delta_+[K(v_1 - v_3)]$$

が実数であることに注意すれば、$\mathrm{Im}\,\mathcal{G}_{\mathrm{I}}^{(2)}$ は次のように書かれる。

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{G}_{\mathrm{I}}^{(2)} = -\frac{ne^2}{8\pi}\frac{\alpha(K, v_1)}{|\epsilon(-K, iK\cdot v_1|^2}\int dv_2 \int dv_3\ f(v_2)\ \alpha(Kv_3)\ \mathrm{Im}\{\delta_-[K(v_1 - v_2)]\ \delta_+[K(v_1 - v_3)]\} \quad \text{(A-6)}$$

一方

$$\int dv_2 \int dv_3\, \dot{S}(Kv_2 v_3)\ \delta_+[u - K\cdot v_2]\ \delta_-[u - K\cdot v_3]$$

$$= -\frac{e}{8\pi^3}\int dv_2 \int dv_3\ f(v_2)\ \alpha(Kv_3)\ \{\delta_-[u - K\cdot v_2]\ \delta_+[u - K\cdot v_3] - \delta_-[u - K\cdot v_3]\ \delta_+[u - K\cdot v_2]\}$$

$$= -\frac{ie}{4\pi^3}\int dv_2 \int dv_3\ f(v_2)\ \alpha(Kv_3)\ \mathrm{Im}\{\delta_-[u - K\cdot v_2]\ \delta_+[u - K\cdot v_3]\} \quad \text{(A-7)}$$

---

*) これは次のように考えてもよい。即ち $p_1 = \pm p(\pm K)$ の寄与は plasma poles の寄与である。一方、§3で示したように、plasma poles の寄与は、安定不安定を問わず全く同じになる。従つて安定系の場合にのみ求めれば充分である。

を（A－4）に代入すると、直ちに

$$\mathrm{Im}\, g_{\mathrm{II}}(Kv_1 t) = -\mathrm{Im}\, g_{\mathrm{I}}^{(2)} \tag{A-8}$$

をうる。かくしてB－L項が導かれた。

Appendix II　(28)式の証明

$\pm p(\pm K) = -i\omega(K) \pm r(K)$ 及び Schwartz の意味の分布関数を考えている事に注意すれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \frac{e^{-i[kv_1 - Z]t} - 1}{i[kv_1 - Z]} \Psi(v_1)$$

$$\sim -\pi \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \Psi(v_1)\, \delta_+[\omega(K) - kv_1] \tag{A-9}$$

$$(Z = \omega(K) + i r(K), \quad |r(K)| \to 0)$$

を証明すればよい。但しここに v_1 は $\underline{V}_1$ のK方向の成分を表わし、$\Psi(v_1)$は実軸上で積分可能な関数である。

これを証明するのに、次の関係を利用する。

$$\Psi(v) = \Psi^+(v) - \Psi^-(v) \tag{A-10}$$

$$\Psi^{\pm}(v) = \pm \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} du\, \delta_{\pm}(v-u)\, \Psi(u) \tag{A-11}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c_{\mp}} du \frac{1}{u-v} \Psi(u) \tag{A-12}$$

但し $c_{\mp}$ は夫々 u＝v の下又は上を通る－∞から＋∞までの積分路を表わす。(A－12) で定義される $\Psi^+(v)$ 及び $\Psi^-(v)$ は夫々上半平面及び下半平面で解析的であり、且つ $|v| \to \infty$ で零となる。我々は更に $\Psi^+(v)$ の下半平面での特異点は実軸より充分離れた所にあると仮定する。

以上の準備の下に、まず(A－10)を(A－9)の左辺に代入し、$e^{-i[kv_1 - Z]t}$ を含む項に対してはその積分路を下側に閉じる。すると充分大きい t に対してはその結果は次のように書かれる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \frac{e^{-i(kv_1 - Z)t}}{i(kv_1 - Z)} \left[\Psi^{+}(v_1) - \Psi^{-}(v_1) \right]$$

$$\fallingdotseq \begin{cases} 0 & \text{for} \quad \gamma(K) > 0 \\ -\dfrac{2\pi}{k}\left[\Psi^{+}\left(\dfrac{Z}{k}\right) - \Psi^{-}\left(\dfrac{Z}{k}\right)\right] & \text{for} \quad \gamma(K) < 0 \end{cases} \tag{A-13}$$

次に残りの項に対しては、$\Psi^{+}(v_1)$ を含む項は上半平面に、$\Psi^{-}(v_1)$ を含む項は下半平面に夫々積分路を閉じると、次のようになる。

$$-\int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \frac{1}{i(kv_1 - Z)} \left[\Psi^{+}(v_1) - \Psi^{-}(v_1) \right]$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2\pi}{k}\Psi^{+}\left(\dfrac{Z}{k}\right) & \text{for} \quad \gamma(K) > 0 \\ -\dfrac{2\pi}{k}\Psi^{-}\left(\dfrac{Z}{k}\right) & \text{for} \quad \gamma(K) < 0 \end{cases} \tag{A-14}$$

(A−13) と (A−14) を加え合わせ、(A−11) を用いると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \frac{e^{-i(kv_1 - Z)t} - 1}{i(kv_1 - Z)} \left[\Psi^{+}(v_1) - \Psi^{-}(v_1) \right]$$

$$= -\frac{2\pi}{k}\Psi^{+}\left(\frac{Z}{k}\right)$$

$$\sim -\frac{2\pi}{k}\int_{-\infty}^{\infty} du\, \delta_{+}\left[\frac{\omega(K)}{k} - u\right] \Psi(u) \tag{A-15}$$

$$\left(|\gamma(K)| \to 0 \right)$$

をうる。これは他ならぬ (A−9) 式である。